Несобственные интегралы от разрывных функций.

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна при $x\in[a;b)$, т.е. $a\le x<b$. Значит, $x=b$ - точка разрыва.

При этом предполагается, что на любом отрезке $[a;b-\varepsilon]$ функция $y=f(x)$ непрерывна и интегрируема.

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx} \qquad (2)$$

Определение 1. Как бы ни было мало число $\varepsilon>0$, если существует конечный предел (2), то его называют несобственным интегралом от разрывной функции. Если предел конечный, то интеграл будет сходящимся, если бесконечный, то интеграл расходящийся.

Аналогично рассматриваются интегралы при условии, что $a<x\le b$, $x=a$ - точка разрыва, тогда

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon+a}^{b} f(x)dx}$$

Можно рассматривать интегралы от функции $y=f(x)$ при условии, что $x=c$ - точка разрыва, если $a<c<b$. Тогда:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx}$$

Пример 1: Вычислить несобственный интеграл:

$$\int_0^a\frac{adx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{a-\varepsilon}\frac{adx}{\sqrt{a^2-x^2}}=a\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin\frac{x}{a}\Big|_0^{a-\varepsilon}\right)=a\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin\frac{a-\varepsilon}{a}-\arcsin 0\right)=$$

$$=a\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin\left(1-\frac{\varepsilon}{a}\right)\right)=a\cdot\arcsin(1-0)=a\cdot\arcsin 1=a\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{a\pi}{2}$$

Предел конечный, интеграл сходящийся.

Пример 2:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{0-\varepsilon}\frac{dx}{x^2}+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x}\bigg|_{-1}^{0-\varepsilon}\right)+\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x}\bigg|_{0+\varepsilon}^{1}\right)=$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{0-\varepsilon}+\frac{1}{1}\right)-\lim_{\varepsilon\to 0}\left(1-\frac{1}{0+\varepsilon}\right)=-\left(\frac{1}{0}+1\right)-\left(1-\frac{1}{0}\right)=-\infty+1-1+\infty=\infty$$

Интеграл расходится.

Покажем, что было бы, если этот интеграл взять как обычный определенный интеграл.

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\bigg|_{-1}^{1}=-1-1=-2 \quad \text{- !!!}$$

Этот результат неверный, так как функция $f(x)=\frac{1}{x^2}>0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx>0$.